



TITLE:

# FSK変調波のARモデルを用いた復調方式の関数解析的考察(応用函数解析の研究)

AUTHOR(S):

中尾, 剛; 江口, 正義

---

CITATION:

中尾, 剛 ...[et al]. FSK変調波のARモデルを用いた復調方式の関数解析的考察(応用函数解析の研究). 数理解析研究所講究録 1996, 975: 155-162

ISSUE DATE:

1996-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60781>

RIGHT:

## FSK 変調波の AR モデルを用いた復調方式の関数解析的考察

福島高専 中尾 剛 (Takeshi Nakao)  
東京商船大 江口 正義 (Masayoshi Eguchi)

### 1 まえがき

F S K 方式は通常 2 つの信号 0, 1 に対して対応する周波数  $2\pi/f_0$ ,  $2\pi/f_1$  を決め, このこれらの周波数の正弦波を交互に切り替え送信することにより, 信号 0, 1 を送る. 受信波には雑音が混入するが, 2 つの周波数の正弦波との相関係数などを算出して, どちらの周波数を受信したかを判断して信号 0, 1 を復調する. この方式では, 1 回に送信可能な情報量は 1 ビットと少ない. また, 復調の誤り率を少なくするためには, 2 つの周波数の間隔を広げる必要があり, 伝送帯域幅が広がってしまう.

そこで, 受信波よりこれを近似する AR モデルをオンラインで推定し, 推定モデルのスペクトル解析により送信波を推定し信号 0, 1 を復調する方式を提案する. この方式によれば, あらかじめ決められた 2 つの周波数だけでなく, 任意の周波数の正弦波を複数同時に送信し, 復調することが可能となる. また, 周波数間隔をこれまでの同期検波復調方式のように大きくする必要がなく, 狭い帯域でより多くの情報を通信することが期待される.

本論文では, 検討の第一段階として, 従来の F S K 方式において, 復調を AR モデルを用いておこない, その誤り率の検討を行う.

### 2 F S K 変調波

F S K (Frequency-Shift Keying) は, 2 つの発振器を用意し, 2 進符号の 0 に対して例えば  $\sin f_0 t$  を, 符号 1 に対して  $\sin f_1 t$  を発生させ, この  $f_0$  と  $f_1$  の角速度の正弦波を, 符号列にしたがって切り替えて伝送する方式である [1]. ここで, 符号列  $\in \mathbf{A}^{\mathbf{Z}} = \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$  ( $\mathbf{Z}$  は自然数の集合) とする. また, 時間を  $t$ , 1 ビットの送信時間を  $\Delta t$ , 送信符号の切り替わる時間を  $t_n$  とする. また,  $t_n \leq t < t_{n+1}$  の  $t$  について  $TN(t) = t_n = n\Delta t$ , 時刻  $[TN(t), TN(t+1))$  に送信する符号を  $S(TN(t))$ , また  $a \in \mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$  とすると, F S K の変調は次の式 (1) で表すことができる.

$$s_a(t) = \begin{cases} \sin(f_0(t - TN(t))) & S(TN(t)) = 0 \text{ の場合} \\ \sin(f_1(t - TN(t))) & S(TN(t)) = 1 \text{ の場合} \end{cases} \quad (1)$$

### 3 同期検波復調方式

従来から行われている FSK 復調方式である同期検波方式について述べる.

FSK 変調波は, 伝送路などにおいてノイズが混入し, 次の式 (2) で表される.

$$f_w(t) = s(t) + \xi_w(t) \quad (2)$$

ここで, ノイズ  $\xi_w(t)$  は, 白色ガウス雑音が一般的に考えられている.

同期検波では,  $\sin f_0 t$  と  $\sin f_1 t$  を受信波に同期させて乗じ, 出力を比較することで行う [1].

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f_w(k) \{ \sin f_0 k + \sin f_1 k \} dk \quad (3)$$

式 (3) の出力が正であれば受信符号は 1, 負であれば 0 と識別する.

この復調方式では, 受信波に位相を同期させて, 正弦波を乗じなければならない. また, 通信速度は,  $f_0$  と  $f_1$  の差の 2 倍未満までしか上げることができない. そのため, 通信速度を上げると伝送帯域が広がってしまうという問題が生じる.

## 4 受信波の AR モデルでの近似

### 4.1 正弦波の AR モデル近似

ここでは, 正弦波が AR モデルを用いて近似することが可能であることを示す. ここで, サンプリング間隔を  $\Delta$ , 初期位相を  $\theta$ , 角速度を  $f$  とし,  $\sin$  関数,  $\cos$  関数を次のように定義する.

$$S(k) = \sin(f\Delta k + \theta) \quad (4)$$

$$C(k) = \cos(f\Delta k + \theta) \quad (5)$$

また、定数  $s = \sin f\Delta$ ,  $c = \cos f\Delta$  とする. 式(4)を加法定理より,

$$\begin{aligned}
 S(n) &= S(f\Delta n + \theta) \\
 &= \sin(f\Delta(n-1) + \theta + f\Delta) \\
 &= \sin(f\Delta(n-1) + \theta) \cos(f\Delta) + \sin(f\Delta) \cos(f\Delta(n-1) + \theta) \\
 &= cS(n-1) + sC(n-1)
 \end{aligned} \tag{6}$$

となる. さらに,  $C(n-1)$  を加法定理より,

$$\begin{aligned}
 C(n-1) &= C(f\Delta(n-1) + \theta) \\
 &= \cos(f\Delta(n-2) + \theta + f\Delta) \\
 &= \cos(f\Delta(n-2) + \theta) \cos(f\Delta) - \sin(f\Delta(n-2) + \theta) \sin(f\Delta) \\
 &= cC(n-2) - sS(n-2)
 \end{aligned} \tag{7}$$

となる. これを式(6)に代入すると,

$$\begin{aligned}
 S(n) &= cS(n-1) + s(cC(n-2) - sS(n-2)) \\
 &= cS(n-1) - s^2S(n-2) + scC(n-2)
 \end{aligned} \tag{8}$$

となる. ここで,  $C(n-2)$  についても式(7)と同様にし, さらにこれを繰り返すと,

$$S(n) = S(\omega\Delta n + \theta) = cS(n-1) - \sum_{i=2}^{\infty} s^2 c^{i-2} S(n-i) \tag{9}$$

となる. ここで,  $|c| < 1$  であるから,  $i$  が大きくなると  $c^{i-2} \rightarrow 0$  となるので,

$$S(n) = a_1 S(n-1) + a_2 S(n-2) + \cdots + a_p S(n-p) + \nu(n) \tag{10}$$

のARモデルの形でほぼ近似することが可能である. ここで  $a_1 = c$ ,  $a_i = s^2 c^{i-2}$  である. また  $\nu(n)$  は誤差項であり白色雑音からの見本過程として取り扱う.

## 4.2 受信波のARモデル近似

次に, FSK変調波の受信信号をARモデルで近似することを考える.

受信波形は, 式(10)にノイズが加わったものであり, 式(11)で表すことができる.

$$y(n, \omega) = S(n) + \xi(n, \omega) \tag{11}$$

ここで、 $\xi(n, \omega)$  は伝送路でのノイズで正規白色過程であり、 $\omega$  は確率見本過程である。また、 $S(n,)$  は式 (10) より、

$$S(n) = \sum_{i=1}^p a_i S(n-i) + \nu(n) \quad (12)$$

で表すことができる。ここで、式 (11) を、式 (12) に代入すると、

$$y(k, \omega) - \xi(k, \omega) = \sum_{i=1}^p a_i (y(k-i, \omega) - \xi(k-i, \omega) + \nu(k)) \quad (13)$$

となる。この式 (13) を整理して、 $z$  変換の複素変数  $z$  を用いて表すと、

$$(I - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}) y(k, \omega) = (I - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}) \xi(k, \omega) + \nu(k) \quad (14)$$

となる。ここで、式 (14) の右辺は白色とはならないが、

$$\eta(k, \omega) = (I - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}) \xi(k, \omega) + \nu(k) \quad (15)$$

とすると、受信波を近似する AR モデルは、

$$y(n, \omega) = (\sum_{i=1}^p a_i z^{-i}) y(n, \omega) + \eta(n, \omega) \quad (16)$$

と表すことができる。

## 5 AR モデルの係数推定

AR モデルの係数推定法は多くの手法が知られている。そこで、ここでは第一近似手法として最小 2 乗法を用いて、最小 2 乗推定量の性質を調べる。

ここで、評価関数として、

$$J(a_1, a_2, a_3, \dots, p; N; \omega) = \sum_{n=p}^N (y(n, \omega) - (\sum_{i=1}^p a_i z^{-i}) y(n, \omega))^2 \quad (17)$$

を導入し、評価関数  $J$  が最小になる係数を考える。

ここで、式(17)を次に示すベクトルと行列

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(p+1, \omega) \\ y(p+2, \omega) \\ \vdots \\ y(N, \omega) \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta(p+1, \omega) \\ \eta(p+2, \omega) \\ \vdots \\ \eta(N, \omega) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} y(p, \omega) & y(p-1, \omega) & \cdots & y(1, \omega) \\ y(p+1, \omega) & y(p, \omega) & \cdots & y(2, \omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-1, \omega) & y(N-2, \omega) & \cdots & y(p, \omega) \end{pmatrix}$$

を用いて表すと

$$J(a_1, a_2, a_3, \dots, p; N; \omega) = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{a})^T(\mathbf{y} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}) \quad (18)$$

となる。ここで、評価関数  $J$  を最小にする係数  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p$  は、

$$\hat{\mathbf{a}} = (\boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega})^{-1} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{y} \quad (19)$$

として求めることができる。

## 6 FSK 変調波の復調

FSK 変調波を受信した波形の復調法を考える。

ここで、 $N$  個の時系列データ  $y(1, \omega), \dots, y(N, \omega)$  から推定された係数  $\hat{a}_i(N, \omega)$ , ( $i = 1, \dots, p$ ) を用いると FSK 変調波は、

$$S(n, \omega) = \sum_{i=1}^p \hat{a}_i(N, \omega) S(n-i, \omega) + \nu(n, \omega) \quad (20)$$

で近似される。式(20)で表現される AR モデルのスペクトル密度関数は、

$$SP(\{\hat{a}_i(N, \omega)\}_{i=1}^p)(f) = \frac{\sigma_\nu^2}{|1 - \sum_{k=1}^p \hat{a}_k(N, \omega) e^{-jfk}|^2} \quad (21)$$

で得られる。ここで、 $\sigma_\nu^2$  は  $\nu(n)$  の分散、 $f$  は相対角速度 ( $0 \leq f \leq 2\pi$ ) である。FSK 変調でビット信号 0 を  $f_0$  に、ビット信号 1 を  $f_1$  に対応させたとしても、

$$SP(\{\hat{a}_i(N, \omega)\}_{i=1}^p)(f_0) > SP(\{\hat{a}_i(N, \omega)\}_{i=1}^p)(f_1)$$

となる場合は、送られたビット信号は0と判断し、

$$SP(\{\hat{a}_i(N, \omega)\}_{i=1}^p)(f_0) < SP(\{\hat{a}_i(N, \omega)\}_{i=1}^p)(f_1)$$

となる場合は、送られたビット信号は1と判断する．このようにして、受信信号から送信されたビット信号を復調することができる．

## 7 ビット誤り率

本復調方式の誤り率の検討をおこなう．

ここで本復調方式の誤り率を次のように定義する．

$$P\{SP(\{\hat{a}_i(N, \omega)\}_{i=1}^p)(f_0) \leq SP(\{\hat{a}_i(N, \omega)\}_{i=1}^p)(f_1) | f = f_0\} \quad (22)$$

$$P\{SP(\{\hat{a}_i(N, \omega)\}_{i=1}^p)(f_0) \geq SP(\{\hat{a}_i(N, \omega)\}_{i=1}^p)(f_1) | f = f_1\} \quad (23)$$

式(22)は、0を送信した変調波を受信して1と復調する場合の誤り率であり、式(23)は、1を送信した変調波を受信して0と復調する場合の誤り率である．ここでは、上記の2つの誤り率をコンピュータシミュレーションにより求め、その検討を行う．シミュレーションの条件は、以下の通りである．

- ・ サンプル周波数 12600Hz
- ・ 搬送波周波数  $f_0$  2100Hz
- ・ 搬送波周波数  $f_1$  1300Hz
- ・ ARモデル係数 8次
- ・ 時系列データ数 20個

ここでの搬送波周波数は、CCITT勧告のV23に準拠したものであり、FSK方式の標準となっているものである．また、ノイズは一般的に通信路でのノイズとして考えられている白色ガウス雑音とした．評価方法は、1ビット当たりの信号エネルギーに対する雑音電力密度比( $E_b/N_0$ )とし、従来の同期検波復調方式の誤り率と比較した．同期検波復調方式の誤り率 $P_e$ は次の式(24)で求めることができる[2]．

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\gamma/2}}^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (24)$$

ここで、 $\gamma$ は信号対雑音比である．

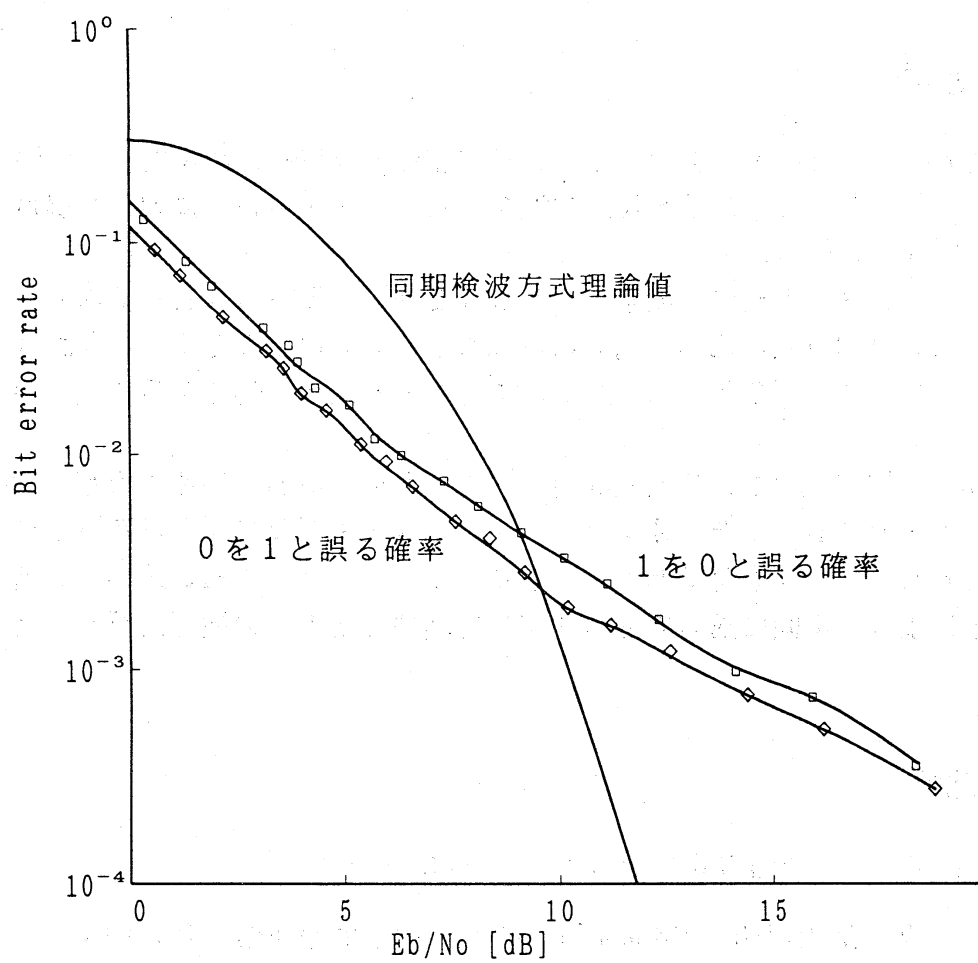
図1 ビット誤り率と  $E_b/N_0$  の関係



図1にシミュレーションによるビット誤り率を示す。

図1より、 $9dB$ 以下のノイズの多い状態では本復調方式を用いた方が従来の方式に比べ誤り率は低くなることがわかる。これにより、本方式はノイズの多い伝送路で有効であることがわかる。

また、0を1と誤る確率が1を0と誤る確率より低いのは、0の方が搬送波周波数が高いため、係数推定のための時系列のなかに1よりは多くの周期の搬送波が入っているためと考えられる。

## 8 まとめ

本論文では、ARモデルを用いてFSK変調波を近似し、復調を行う手法を提案した。また、従来のFSK変調波をARモデルを用いて復調した場合の誤り率の検討を行った。

シミュレーションの結果、従来からFSK変調波の復調方式として用いられている同期復調方式に比べ、 $E_b/N_0$ が $9dB$ 以下で本提案の方式の方が誤り率は低くなり、ノイズの多い伝送路で、本提案の方式が有効であることがわかった。

今後は、係数推定のための最適な時系列の個数や、最適な係数の次数の検討を行う予定である。また、オンライン処理でARモデルの係数推定方法についても考察していく予定である。さらに、1度に送信する搬送波の数を増やすことにより、1回に送信できる情報量を増やした場合の検証を行う予定である。

## 参考文献

- [1] 平松 啓二，“通信方式”，コロナ社，1985.
- [2] 奥村善久，進士昌明，“移動通信の基礎”，電子情報通信学会，1986.